A 1 ohne STR

Geg.: $f(x) = -0{,}5x^3 + 1{,}5x^2 + 4{,}5x - 3{,}5$

$T(-1|-6)$ lokaler Tp

$H(3|10)$ lokaler Hp

Ges: a) Gleichung der Tangente an den Graphen im Punkt $P(1|f(1))$

Re: $y = mx + b$; $m = f'(1)$; $y = f(1)$; $f(1) = -0{,}5 + 1{,}5 + 4{,}5 - 3{,}5 = 2$

$f'(x) = -1{,}5x^2 + 3x + 4{,}5$; $f'(1) = -1{,}5 + 3 + 4{,}5 = 6$

Berechnung von b

$2 = 6 \cdot 1 + b$; $b = -4$. Also lautet die Tangentengleichung: $y = 6x - 4$

Ges: b) Begründe: Tangente ist diejenige mit maximaler Steigung.

Re: Die Steigung vor dem Tp und nach dem Hp muss negativ sein, da f eine Funktion 3. Grades ist. Die Steigung des Graphen von f ist nur positiv für $-1 < x < 3$. $f'(x)$ wird dann maximal, wenn $g(x) = -1{,}5x^2 + 3x$ maximal wird. Das ist am Scheitelpunkt der Fall.

Nst von $g(x)$: $x(-1{,}5x + 3) = 0$; $x = 0 \lor x = 2$; $S(1|1{,}5)$.

A2 ohne STR

Gegi: $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 7 = \frac{1}{8} \cdot (x+2) \cdot (x^2 - 12x + 28)$

Ges.: a) Weise nach: Die Funktion f hat die Nullstelle $x = -2$

Re.: $f(-2) = \frac{1}{8}(-2+2) \cdot ((-2)^2 - 12(-2) + 28) = \frac{1}{8} \cdot 0 \cdot 56 = 0$

Ges.: b) Bestimme die anderen Nst von f.

Re: $x^2 - 12x + 28 = 0$; $(x-6)^2 - 36 + 28 = 0$; $(x-6)^2 = 8$; $x = -\sqrt{8} + 6 \vee x = \sqrt{8} + 6$

Ges.: c) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $N(-2|0)$

Re: Siehe A1: $y = 7x + 14$

Ges: d) $g_a(x) = f(x+a)$. Bestimme a so, dass alle Nst im positiven Teil der x-Achse liegen.

Re: Die kleinste Nst liegt bei $x = -2$. Der Graph muss also um 2 E nach rechts verschoben werden. $g_{-2}(x) = f(x-2) = \frac{1}{8}(x-2)^3 - \frac{5}{4}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2) + 7$.

A3 ohne STR

Geg: $f(x) = 0{,}5x^3 - x^2 - 3x + 2$

Ges: a) Bestimme Gleichung der Tangente im Schnittpunkt mit der y-Achse.

Re: siehe A1: $y = -3x + 2$

Ges: b) Begründe: Keiner der Graphen in Abb 2 und 3 ist ein Graph der Ableitungsfunktion von f

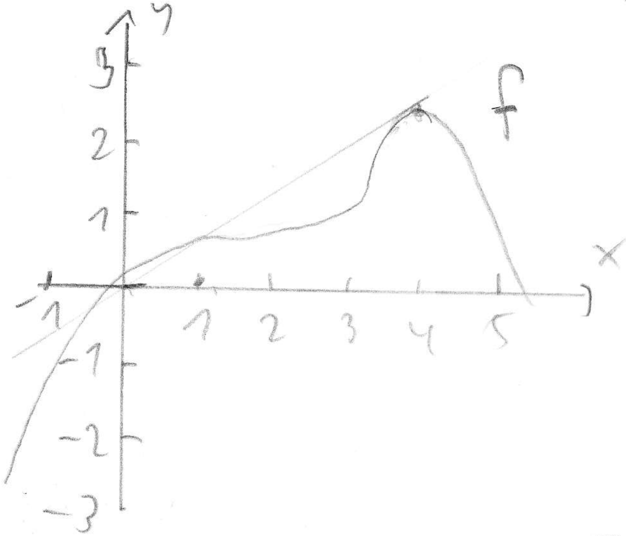
Re: Die Steigung im y-Achsenabschnitt beträgt nach Teil a) $f'(0) = -3$. Im Abb. 2 liest man eine Steigung von 3 ab und in Abb 3 eine Steigung von -2

A4 ohne GTR

Geg: Graph der 1. Ableitungsfunktion f'

Ges: a) Aussagen über Monotonie, Extremstellen und Verhalten für betragsgroße x.

Re:



- Der Graph von f ist im Intervall $]-\infty; 4[$ monoton steigend, da $f'(x) \geq 0$ in diesem Intervall. Im Intervall $]4; \infty[$ monoton fallend.
- Der Graph von f hat bei $x = 4$ einen HP, da $f'(4) = 0$ mit VZW von $+ \to -$
- Für $x \to -\infty$ geht $f(x) \to -\infty$, und für $x \to \infty$ geht $f(x) \to -\infty$, da bei $x = 4$ die einzige Extremstelle mit einem HP vorliegt.

m von $\overline{PQ}$ ist 1; also $x_1 \approx 0$ und $x_2 \approx 3$

Ges: b) $P(0|0)$ und $Q(4|4)$ liegen auf Graphen von f

Gib begründet an: In wie vielen Punkten hat der Graph von f die gleiche Steigung wie die Gerade durch P und Q.

Re: Die Gerade hat eine pos. Steigung und der Graph von f ist in den Intervallen $]-\infty; 1[$ und $]1; 4[$ streng monoton steigend. In diesen beiden Intervallen kann jeweils 1 Punkt mit gleicher Steigung liegen.

A5 ohne GTR

Geg: a) Die Anzahl der Bakterien verdoppelt sich alle 5 Std. $f(0) = 1200$

Ges: Exponentialfunktion $f(t)$, die/der Anzahl der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit (in Stunden) angibt

Re: $f(t) = c \cdot a^t$, $a = 2$; $c = 1200$; $f_5(t) = 1200 \cdot 2^t$ zum Zeitschritt $t = 5$ Std

$f_5(1) = 2400$

$f_1(t) = 1200 \cdot 2^{\frac{1}{5} \cdot t}$ zum Zeitschritt $t = 1$ Std.

Geg: b) Graph einer Exponentialfunktion ist gegeben

Ges: Prüfe ob der Graph zu einer der Aussagen i – iv gehört. Begründe Deine Entscheidung

Re: Der Graph gehört zu ii) $f(x) = 2^{x-1}$, da $f(1) = 1$ und $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, was mit dem Graphen übereinstimmt.

Die Überprüfung zweier Punkte reicht aus, da eine Exponentialfunktion durch zwei Punkte festgelegt ist

A6 ohne STR

Geg.: a) Die Graphen der Fkt. $g(x) = \sin(x+2)$ und $h(x) = -\sin(x) - 1$ sollen aus dem Graphen der Fkt. $f(x) = \sin(x)$ gewonnen werden.

Ges.: Gib an welche Operationen dafür notwendig sind.

Re.: Für den Graphen von $g(x)$: Der Graph muss um 2 E nach links verschoben werden

Für den Graphen von $h(x)$: Der Graph wird zunächst um 1 E nach oben verschoben und dann an der x-Achse gespiegelt

Geg.: b) Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt eines Graphen einer allgemeinen Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$

Ges.: Bestimme die Parameter a, b, c, d

Re.: $a = 2$, weil die Differenz zwischen Max und Min 4 beträgt, aber bei $\sin(x)$ nur 2 ist. Folglich wurde der Graph mit $a = 2$ in y-Richtung gestreckt.
$d = 1$, weil der Graph um eine Einheit nach oben verschoben wurde.
$c = 3$, weil der Graph um 3 Einheiten nach rechts verschoben wurde.
$b = \frac{\pi}{2}$, weil der Graph mit $\frac{4}{2\pi}$ in x-Richtung gestaucht wurde.

A7 ohne STR

Geg: Der Graph zeigt die Tauchtiefe h eines Tauchgangs als Funktion der Zeit t (t in min; h in m)

Ges: a) Gib mit Begründung an, wie lange der Tauchgang gedauert hat und welche maximale Tauchtiefe erreicht wurde.

Re: Die NSt. liegen bei x = 0 oder x = 25. Also hat der Tauchgang 25 min gedauert. Das Min liegt bei y = -30. Also war die Tauchtiefe 30 m.

Ges: b) Berechne die mittlere Abtauchgeschw.

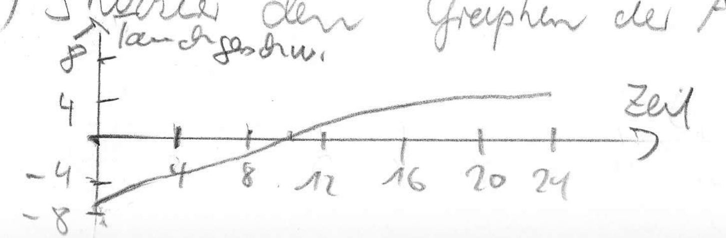
Re: Der Taucher taucht in 10 min 30 m. Also beträgt die mittlere Abtauchgeschw $\frac{3m}{min}$.

Ges: c) Gib den Zeitpunkt und die Größe der größten Abtauchgeschwindigkeit an

Re: Bei t = 0 war die Abtauchgeschw. am größten. Die Steigung der Tangente beträgt im Punkt (0|0) m = - 6,5. Damit beträgt die maximale Abtauchgeschw. 6,5 $\frac{m}{min}$

Ges: d) Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktion in der Abb

Re



A8 ohne STR

Ses: Der Graph gehört zur Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{35}{72}x$

Ses: a) Bestimme rechnerisch die Extremst. von f

Re: $f'(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{35}{72}$; $f'(x) = 0$; $x^2 - x - \frac{35}{4} = 0$; $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{35}{4} = 0$,

$x = -2{,}5$ oder $x = 3{,}5$. Am Graphen erkennt man, dass bei $x = -2{,}5$ ein Minimum vorliegt und bei $x = 3{,}5$ ein Maximum vorliegt

Ses: b) Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkt $W(0{,}5 / f(0{,}5))$

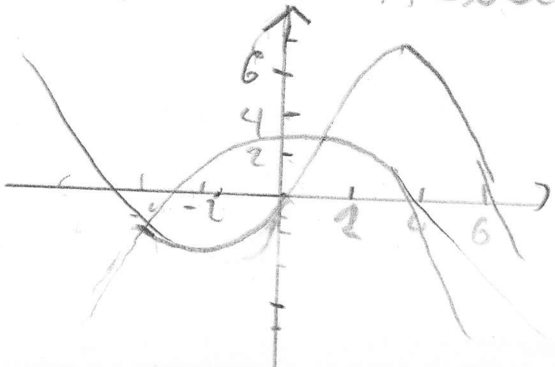
Re: $y = mx + b$; $m = f'(0{,}5) = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{35}{72} = -\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{35}{12} = \frac{36}{12} = 3$

$f(0{,}5) = -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4} + \frac{35}{72}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{72} + \frac{1}{24} + \frac{35}{24} = -\frac{1}{72} + \frac{3}{72} + \frac{105}{72} = \frac{107}{72}$

Berechnung von b: $\frac{107}{72} = 3\cdot(0{,}5) + b$; $\frac{107}{72} - \frac{108}{72} = b = -\frac{1}{72}$; $y = 3x - \frac{1}{72}$

Ses: c) Graphen des Ableitungsfunktion einzeichnen

Re:



- Bei $x = -2{,}5$ und $x = 3{,}5$ sind die Nullst. wegen der Extremst. beif
- B $x = 0{,}5$ liegt die stärkste Steigung mit $m = 3$ vor.
- Der Ableitungsgraph einer ganzrat. Fkt 3. Grades ist eine Parabel

A 1 mit GTR

Geg: $f(x) = \frac{-8x^3 - 12x^2 + 90x - 81}{32}$

Ges: a) Extrempunkte bestimmen!

Re: $f'(x) = \frac{-24x^2 - 24x + 90}{32}$; $f'(x) = 0$, $x = -\frac{5}{2} = -2{,}5 \lor x = \frac{3}{2} = 1{,}5$

VZW:

x	-3	$-2{,}5$	0	$1{,}5$	2
$f'(x)$	$-1{,}6875$	0	$2{,}8125$	0	$-1{,}6875$

$- \quad + \quad + \quad -$

Bei $x = -2{,}5$ liegt ein Minimum vor. $T(-2{,}5 \mid -8)$

Bei $x = 1{,}5$ liegt ein Maximum vor $H(1{,}5 \mid 0)$

Ges: b) Zeige rechnerisch, dass die Tangente t an den Graphen der Fkt f im Punkt $P(-0{,}5 \mid -4)$ die Gleichung $y = 3x - 2{,}5$ hat

Re: $f'(-0{,}5) = 3$; $-4 = 3(-0{,}5) + b$; $b = -2{,}5$.

Ges c) Bestimme die Normale zur Tangente im Punkt P

Re: $m_T \cdot m_N = -1$; $m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{3}$; $-4 = -\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) + b$; $-4\frac{1}{6} = b$; $y_N = -\frac{1}{3}x - \frac{25}{6}$

Ges d) Flächeninhalt und Innenwinkel des Dreiecks, das aus Tangente, Normale und x-Achse gebildet wird

Re: Nullst. der Tangente $N_T(\frac{5}{6} \mid 0)$; Nullst. der Normalen $N_N(-\frac{25}{2} \mid 0)$

$A_D = \frac{1}{2} g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{80}{6} \cdot 4 = \frac{160}{6}$ [FE]. $m = \tan\alpha$; $3 = \tan\alpha$; $\alpha \approx 71{,}6°$; $\beta \approx 18{,}4°$; $\gamma = 90°$

A2 mit GTR

Geg: $f(x) = \frac{2}{9}x^3 - x^2 + 3$

Ges: a) Zeige rechnerisch, dass der Graph den Hp(0|3) und den Tp(3|0) hat.

Re: $f'(x) = \frac{2}{3}x^2 - 2x$; $f'(x) = 0$; $\frac{2}{3}x^2 - 2x = 0$; $x(\frac{2}{3}x - 2) = 0$; $x = 0 \vee x = 3$

VZW:

x	-3	0	1	3	6
$f'(x)$	12	0	$-\frac{4}{3}$	0	12

H(0|3) T(3|0)

Ges: b) Bestimme rechnerisch die Punkte an denen der Graph die Steigung 12 hat.

Re: $f'(x) = 12$; $\frac{2}{3}x^2 - 2x = 12$; $\frac{2}{3}x^2 - 2x - 12 = 0$; GTR $\to x = -3 \vee x = 6$

$P_1(-3|-12)$, $P_2(6|15)$

Ges: c) Bestimme den Punkt P des Graphen, an dem der Graph der Fkt f die minimale Steigung hat.

Re: Gesucht ist das Minimum der ersten Ableitung. $f''(x) = \frac{4}{3}x - 2$; $f''(x) = 0$

$\frac{4}{3}x - 2 = 0$; $x = \frac{3}{2}$ VZW:

x	1	$1{,}5$	2
$f''(x)$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$

Minimum (1,5|1,5)

Ges: d) Weise nach, dass Gerade mit Gleichung $t(x) = \frac{8}{3}x + \frac{40}{9}$ Tangente an Graphen von f ist. Gib Berührpunkt an

Re: $f(x) = t(x)$; $\frac{2}{9}x^3 - x^2 + 3 = \frac{8}{3}x + \frac{40}{9}$; $\frac{2}{9}x^3 - x^2 - \frac{8}{3}x - \frac{13}{9} = 0$; $x = -1 \vee x = 6{,}5$

$f'(-1) = \frac{8}{3}$; $f'(6{,}5) \approx 15{,}2 \neq \frac{8}{3}$. Damit ist der Berührpunkt $(-1|\frac{16}{9})$

A2 mit GTR

Geg: $f(x) = \frac{2}{9}x^3 - x^2 + 3$

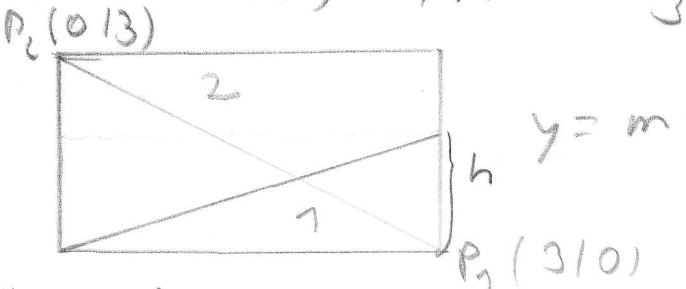
Ges: e) Überprüfe, ob der Punkt $Q(-1{,}5|-0{,}5)$ auf der Normalen zur Tangente im Punkt $W(1{,}5|1{,}5)$ liegt.

Steigung der Tangente bei 1,5 ist $f'(1{,}5) = -\frac{3}{2}$

Re: Gleichung der Normalen: $y_n = +\frac{2}{3}x + b$; $1{,}5 = +\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} + b$; $b = 0{,}5$

$y_n = \frac{2}{3}x + 0{,}5$, $y_n = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 0{,}5 = -0{,}5$! Q liegt auf der Normalen

Ges: f)



$y = m \cdot x$; $m = 2$

Re: $A_D = \frac{1}{2} g \cdot h$; $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot h = 3$; $h = \frac{6}{9}$; $h = \frac{6}{3} = 2$; $m = \frac{2}{3}$

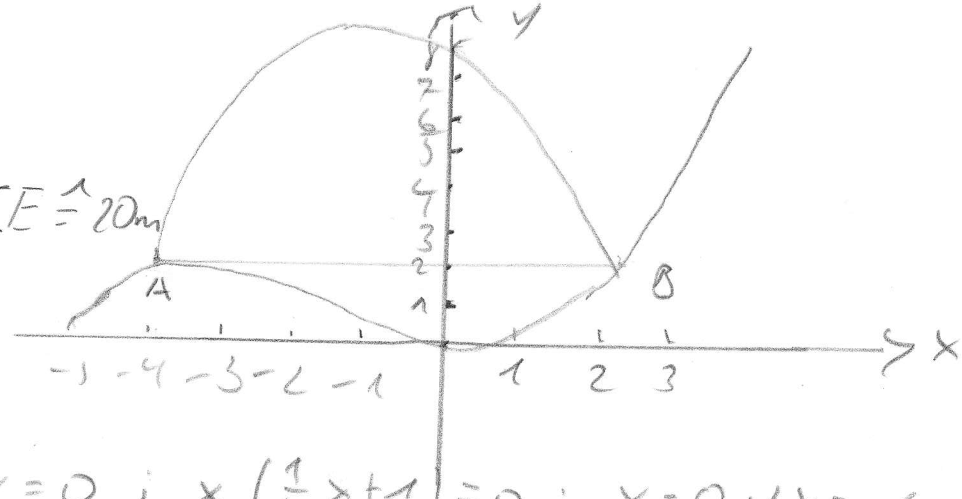
Ges: g) Es ist $h(x) = k \cdot f(x)$ mit $k \geq 1$. Beschreibe, wie sich k auf die Lage des Hoch und Tiefpunktes auswirkt.

Re: Der Graph von h entsteht aus dem Graphen von f durch Streckung in y-Richtung. Dadurch verschiebt sich der Hp in y-Richtung.

Der Tp bleibt auf der x-Achse, da seine y-Koordinate 0 beträgt.

A3 mit GTR

Ge: $f(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2,\ x \in [-5;3]$ $1\,LE \hat{=} 20m$



Ges: a) Bestimme den nördlichsten Punkt A

Re: $f'(x) = \frac{1}{4}x^2 + x$; $f'(x) = 0$, $\frac{1}{4}x^2 + x = 0$; $x(\frac{1}{4}x + 1) = 0$; $x = 0 \vee x = -4$

VZW

x	-5	-4	-3	0	1
f'(x)	+1,25	0	-0,75	0	1,25
	+		−		+

$H(-4|\frac{8}{3})$ $T(0/0)$

Ges: b) In östliche Richtung verläuft von A aus eine Abtrennung mit Länge 120m. Begründe rechnerisch, dass die Abtrennung genau bis zum Radweg verläuft

Re: $f(2) = \frac{8}{3}$

Ges: c) Größte Ausdehnung des Nichtschwimmerbereichs in S-N-Richtung berechnen. Angabe in m

Re: Der Abstand zwischen dem Tp und der Geraden mit der Gleichung $y = \frac{8}{3}$ ist gesucht. Der Abstand beträgt $\frac{160}{3}$ m.

A3 mit GTR

<u>Gg</u>: $f(x) = \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2, \; x \in [-5;3]$ $\quad 1 LE \hat{=} 20m$

d) Abtrennung hat die Form einer Parabel mit den Punkten
$A(-4|\frac{8}{3}), B(2|\frac{8}{3}), C(1|\frac{152}{27})$

<u>Gs</u>: d1) Gleichung der Parabel $p(x)$

<u>Re</u>: $p(x) = ax^2 + bx + c$;

$\frac{8}{3} = a \cdot (-4)^2 + b(-4) + c$
$\frac{8}{3} = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$
$\frac{152}{27} = a + b + c$

GTR $\rightarrow$ $a = -\frac{16}{27}$, $b = -\frac{32}{27}$, $c = \frac{200}{27}$

$p(x) = -\frac{16}{27}x^2 - \frac{32}{27}x + \frac{200}{27}$

<u>Ges</u>: d2) Im Punkt $S(0|7\frac{1}{3})$ befindet sich ein Schwimmfloß. Überprüfe, ob es sich im Schwimmbereich befindet

<u>Re</u>: $p(0) = \frac{200}{27}$; $7\frac{1}{3} = \frac{22}{3} = \frac{198}{27}$. Das Floß befindet sich im Bereich.

<u>Ges</u>: d3) Entfernung zwischen südlichstem Punkt der Badebucht und dem nördlichsten Punkt des Schwimmerbereichs ist gesucht.

<u>Re</u>: $p'(x) = -\frac{32}{27}x - \frac{32}{27}$; $p'(x) = 0$; $-\frac{32}{27}x - \frac{32}{27} = 0$; $x = -1$ $\quad p(-1) = 8$ $\quad H_s(-1|8)$, $T(0|0)$

Mit Pythagoras: $1^2 + 8^2 = \overline{HT}^2$; $\overline{HT} = \sqrt{65}$ $\quad$ Mia muss $2 \cdot \overline{HT} \cdot 20 \approx 322\,m$ schwimmen.